**Kubický splajn**

Vycházíme z toho, že máme k dispozici všechny hodnoty uvedené v tabulce. (Dělení nemusí být ekvidistantní).

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| ***x0*** | ***x1*** | ***x2*** | ***…*** | ***xn*** |
| ***f0*** | ***f1*** | ***f2*** | ***…*** | ***fn*** |

Kubický splajn je tvořen polynomy třetího stupně (na každém dílku jeden), které na sebe plynule navazují. Protože polynom třetího stupně má obecně 4 koeficienty, budeme hledat 4.(*n−*1) *=* **4*n−* 4** koeficientů. Rovnice, které máme k dispozici a počet takových rovnic:

* funkční hodnoty v tabulkových bodech *n*
* společné hodnoty funkce ve vnitřních bodech *n*–2
* společné hodnoty první derivace ve vnitřních bodech *n*–2
* společné hodnoty druhé derivace ve vnitřních bodech *n*–2

Celkem tedy máme *n* + *n*–2 + *n*–2 + *n*–2 = **4*n*–6** rovnic. Tedy, chybí dvě rovnice. Ty doplníme tak, že zvolíme hodnoty prvních derivací (sklonu tečny) v obou krajních bodech.

Zapíšeme-li všechny uvedené podmínky do rovnic, získáme soustavu:

Řešením soustavy všech **4*n*–4** rovnic získáme hodnoty druhých derivací v tabulkových bodech. Soustavu lze řešit kteroukoliv známou metodou, ale kvůli její tridiagonální matici soustavy se využívá rekurentní postup:

Přípravné kroky:

**;**

přitom *j* = 1, 2, … , *n-*1

údaje zapisujeme do tabulky – viz níže.

Řešení soustavy:

Přímý chod (*k* = 0, 1, … *n)*:

Zpětný chod (*k* = n- 1, … , 0*)*:

Všechny kubické polynomy *Si* potom získáme takto:

, kde

Algoritmus:

1. **Vstup:**

4. **Pro *j* = 1,2, … , *n*-1**

7. **Pro *k* = 0, 1, … , *n***



12. **Pro *k* = *n*-1, … , 1 , 0**
14. **Pro *i* = 0, 1, …, *n***

1. **vzorec z předchozího snímku**
2. **Výstup: (hodnota**

Algoritmus tedy poskytuje hodnotu aproximující funkce (splajnu) ve zvoleném bodě . To znamená, že chceme-li např. graf, musíme výpočet bodů 14 – 17 opakovat pro tolik bodů grafu, kolik požadujeme.

Funkce *S*(*x*), tedy celý splajn, je funkce daná parciálně a můžeme ji zapsat takto:

Tvar, ve kterém jsou jednotlivé *Si*(*x*) zapsány, není základním tvarem pro polynom třetího stupně, ale tvarem vhodným pro výpočet. Chceme-li mít základní tvar, musíme každý z nich na takový upravit. Náš program takové koeficienty poskytuje.

Tvar křivky můžeme ovlivňovat volbou derivací v krajních bodech. Ovlivňování využíváme k podpoře „přirozeného“ průběhu funkce. Nevhodná ovlivnění vidíme na grafech:

vlevo :

***f '*(0) *= f '*(4) *=* 20**

vpravo:

***f '*(0) *=* −12 *, f '*(4) *=* 8**

Celý výpočet lze ilustrovat na příkladu (tmavě červené údaje jsou daná data, zelené jsou volby derivací v krajních bodech). Tabulka slouží k výpočtu hodnot druhých derivací *Mi* .

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  | koeficienty polynomů | | | |
| ***j*** | ***x*** | ***f*** | ***f'*** | ***h*** | ****** | ****** | ***d*** | | ***p*** | ***q*** | ***r*** | ***M*** | ***a0*** | ***a1*** | ***a2*** | ***a3*** |
|  |  |  |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 1 | X | X | X | X | X | X | X | | X | **0** | **0** | X |  |  |  |  |
| 2 | **0** | **1** | **7** | X | 1 | 0 | -24 | | 2 | -0,5 | -12 | -10,3 |  |  |  |  |
| 3 | **1** | **4** |  | 1 | 0,667 | 0,333 | -8 | | 1,833 | -0,36 | -2,18 | -3,46 | **1** | **7** | **-5,13** | **1,134** |
| 4 | **3** | **2** |  | 2 | 0,333 | 0,667 | 4 | | 1,758 | -0,19 | 3,103 | 3,522 | **1,552** | **5,343** | **-3,48** | **0,582** |
| 5 | **4** | **3** |  | 1 | 0,667 | 0,333 | -3 | | 1,937 | -0,34 | -2,08 | -2,2 | **43,03** | **-36,1** | **10,35** | **-0,95** |
| 6 | **6** | **2** | **-1** | 2 | 0 | 1 | -1,5 | | 1,656 | 0 | 0,352 | 0,352 | **-31,7** | **19,9** | **-3,66** | **0,213** |

V posledních sloupcích jsou koeficienty upravených polynomů, např. první polynom:

Chceme-li tedy najít hodnotu splajnu *S*(2), musíme napřed zjistit, ve kterém z intervalů se bod 0,5 nachází – je to ve druhém intervalu – a to znamená, že pro*S*(2) musíme použít .

Graf tohoto splajnu pro volbu *f ‘* (0) = ̶ 4 , *f ‘* (10) = ̶ 1 je na následující straně.

Zde můžeme dobře sledovat plynulou návaznost sousedních polynomů (spojité derivace prvního i druhého řádu v uzlových bodech).