**Kubický splajn**

Vycházíme z toho, že máme k dispozici všechny hodnoty uvedené v tabulce. (Dělení nemusí být ekvidistantní).

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| ***x0*** | ***x1*** | ***x2*** | ***…*** | ***xn*** |
| ***f0*** | ***f1*** | ***f2*** | ***…*** | ***fn*** |

Kubický splajn je tvořen polynomy třetího stupně (na každém dílku $\left〈x\_{i-1};x\_{i}\right〉$ jeden), které na sebe plynule navazují. Protože polynom třetího stupně má obecně 4 koeficienty, budeme hledat 4.(*n−*1) *=* **4*n−* 4** koeficientů. Rovnice, které máme k dispozici a počet takových rovnic:

* funkční hodnoty v tabulkových bodech *n*
* společné hodnoty funkce ve vnitřních bodech *n*–2
* společné hodnoty první derivace ve vnitřních bodech *n*–2
* společné hodnoty druhé derivace ve vnitřních bodech *n*–2

Celkem tedy máme *n* + *n*–2 + *n*–2 + *n*–2 = **4*n*–6** rovnic. Tedy, chybí dvě rovnice. Ty doplníme tak, že zvolíme hodnoty prvních derivací (sklonu tečny) v obou krajních bodech.

Zapíšeme-li všechny uvedené podmínky do rovnic, získáme soustavu:

$$\left(\begin{matrix}\begin{matrix}\begin{matrix}2h\_{1}&h\_{1}\\h\_{1}&2(h\_{1}+h\_{2})\\0&h\_{2}\end{matrix}&\begin{matrix}0&0\\h\_{2}&0\\2(h\_{2}+h\_{3})&h\_{3}\end{matrix}\end{matrix}& \begin{matrix}\begin{matrix}‒      &0\\‒      &0\\‒      &0\end{matrix}                 &\begin{matrix}0              &0\\0              &0\\0              &0\end{matrix} \end{matrix}\\  \begin{matrix}\begin{matrix}‒          &‒\\0          &0\\0          &0\end{matrix}                   &\begin{matrix}‒           &‒\\0           &0\\0           &0\end{matrix}\end{matrix}&   \begin{matrix}\begin{matrix}‒    &‒\\‒    &h\_{n-1}\\‒    &0\end{matrix}&\begin{matrix}‒&‒\\2(h\_{n-1}+h\_{n})&h\_{n}\\h\_{n}&2h\_{n}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}\begin{matrix}M\_{0}\\M\_{1}\\M\_{2}\end{matrix}\\\begin{matrix}‒\\M\_{n-1}\\M\_{n}\end{matrix}\end{matrix}\right)=6\left(\begin{matrix}\begin{matrix}\frac{y\_{1}-y\_{0}-h\_{1}m\_{0}}{h\_{1}}\\\frac{y\_{2}-y\_{1}}{h\_{2}}-\frac{y\_{1}-y\_{0}}{h\_{1}}\\\frac{y\_{3}-y\_{2}}{h\_{3}}-\frac{y\_{2}-y\_{1}}{h\_{2}}\end{matrix}\\\begin{matrix}‒\\\frac{y\_{n}-y\_{n-1}}{h\_{n-1}}-\frac{y\_{n-1}-y\_{n-2}}{h\_{n}}\\\frac{h\_{n}m\_{n}+y\_{n-1}-y\_{n}}{h\_{n}}\end{matrix}\end{matrix}\right)$$

Řešením soustavy všech **4*n*–4** rovnic získáme hodnoty druhých derivací $M\_{j}$ v tabulkových bodech. Soustavu lze řešit kteroukoliv známou metodou, ale kvůli její tridiagonální matici soustavy se využívá rekurentní postup:

$$d\_{0}=\frac{6}{h\_{1}}\left(\frac{f\_{1}-f\_{0}}{h\_{1}}-f'\_{0}\right)  , d\_{n}=\frac{6}{h\_{n}}\left(f'\_{n}-\frac{f\_{n}-f\_{n-1}}{h\_{n}}\right)$$

Přípravné kroky:

$μ\_{0}=λ\_{n}=q\_{-1}=r\_{-1}=0   ;   μ\_{n}=λ\_{0}=1$ **;** $λ\_{j}=\frac{h\_{j+1}}{h\_{j+1}+h\_{j}}    ;   μ\_{j}=1-λ\_{j}$

přitom *j* = 1, 2, … , *n-*1

údaje zapisujeme do tabulky – viz níže.

$$d\_{j}=\frac{6}{h\_{j+1}+h\_{j}}.\left[\frac{f\_{j+1}-f\_{j}}{h\_{j+1}}-\frac{f\_{j}-f\_{j-1}}{h\_{j}}\right]$$

Řešení soustavy:

Přímý chod (*k* = 0, 1, … *n)*:

$$r\_{k}=\frac{d\_{k}-μ\_{k}.r\_{k-1}}{p\_{k}}$$

$$q\_{k}=\frac{-λ\_{k}}{p\_{k}}$$

$$p\_{k}=μ\_{k}.q\_{k-1}+2$$

Zpětný chod (*k* = n- 1, … , 0*)*:

$$M\_{k}=q\_{k}.M\_{k+1}+r\_{k}$$

$$M\_{n}=r\_{n}$$

Všechny kubické polynomy *Si* potom získáme takto:

$A\_{i}\left(x\right)=\frac{M\_{j-1}\left(x\_{j}-x\right)^{3}+M\_{j}\left(x-x\_{j-1}\right)^{3}}{6.h\_{j}}$

$S\_{i}\left(x\right)=A\_{i}\left(x\right)+B\_{i}\left(x\right)+C\_{i}(x)$, kde

$B\_{i}\left(x\right)=\left(f\_{j-1}-\frac{M\_{j-1}h\_{j}^{2}}{6}\right).\frac{\left(x\_{j}-x\right)}{h\_{j}}$

$C\_{i}\left(x\right)=\left(f\_{j}-\frac{M\_{j}h\_{j}^{2}}{6}\right).\frac{\left(x-x\_{j-1}\right)}{h\_{j}}$

Algoritmus:

1. **Vstup:** $x\_{0}, x\_{1}, …,x\_{n}, …,f\_{0}, f\_{1}, …,f\_{n}, f'\_{0}, f'\_{n},x^{\*}$
2. $d\_{0}=\frac{6}{h\_{1}}\left(\frac{f\_{1}-f\_{0}}{h\_{1}}-f'\_{0}\right)  ,d\_{n}=\frac{6}{h\_{n}}\left(f'\_{n}-\frac{f\_{n}-f\_{n-1}}{h\_{n}}\right)$
3. $μ\_{0}=λ\_{n}=q\_{-1}=r\_{-1}=0  ;  μ\_{n}=λ\_{0}=1$
4. **Pro *j* = 1,2, … , *n*-1**
5. $λ\_{j}=\frac{h\_{j+1}}{h\_{j+1}+h\_{j}}   ;   μ\_{j}=1-λ\_{j}$
6. $d\_{j}=\frac{6}{h\_{j+1}+h\_{j}}.\left[\frac{f\_{j+1}-f\_{j}}{h\_{j+1}}-\frac{f\_{j}-f\_{j-1}}{h\_{j}}\right]$
7. **Pro *k* = 0, 1, … , *n***
8. $p\_{k}=μ\_{k}.q\_{k-1}+2$
9. $q\_{k}=\frac{-λ\_{k}}{p\_{k}}$
10. $r\_{k}=\frac{d\_{k}-μ\_{k}.r\_{k-1}}{p\_{k}}$
11. $M\_{n}=r\_{n}$
12. **Pro *k* = *n*-1, … , 1 , 0**
13. $M\_{k}=q\_{k}.M\_{k+1}+r\_{k}$
14. **Pro *i* = 0, 1, …, *n***
15. $Je-li  x^{\*}>x\_{i} , $

$j=i+1  ,  jinak jdi na 16$

1. $ S=…$ **vzorec z předchozího snímku**
2. **Výstup:** $S$ **(hodnota** $S(x^{\*}))$

Algoritmus tedy poskytuje hodnotu aproximující funkce (splajnu) ve zvoleném bodě $x^{\*}$. To znamená, že chceme-li např. graf, musíme výpočet bodů 14 – 17 opakovat pro tolik bodů grafu, kolik požadujeme.

Funkce *S*(*x*), tedy celý splajn, je funkce daná parciálně a můžeme ji zapsat takto:

$$S\left(x\right)=\left\{\begin{matrix}S\_{1}\left(x\right) pro x\in \left〈x\_{0};x\_{1}\right〉\\\cdots \cdots \cdots \cdots \\ S\_{n}(x) pro x\in \left〈x\_{n-1};x\_{n}\right〉\end{matrix}\right.$$

Tvar, ve kterém jsou jednotlivé *Si*(*x*) zapsány, není základním tvarem pro polynom třetího stupně, ale tvarem vhodným pro výpočet. Chceme-li mít základní tvar, musíme každý z nich na takový upravit. Náš program takové koeficienty poskytuje.

Tvar křivky můžeme ovlivňovat volbou derivací v krajních bodech. Ovlivňování využíváme k podpoře „přirozeného“ průběhu funkce. Nevhodná ovlivnění vidíme na grafech:

vlevo :

***f '*(0) *= f '*(4) *=* 20**

vpravo:

***f '*(0) *=* −12 *, f '*(4) *=* 8**

Celý výpočet lze ilustrovat na příkladu (tmavě červené údaje jsou daná data, zelené jsou volby derivací v krajních bodech). Tabulka slouží k výpočtu hodnot druhých derivací *Mi* .

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | koeficienty polynomů |
| ***j*** | ***x*** | ***f*** | ***f'*** | ***h*** | ****** | ****** | ***d*** | ***p*** | ***q*** | ***r*** | ***M*** | ***a0*** | ***a1*** | ***a2*** | ***a3*** |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 1 | X | X | X | X | X | X | X | X | **0** | **0** | X |   |   |   |   |
| 2 | **0** | **1** | **7** | X | 1 | 0 | -24 | 2 | -0,5 | -12 | -10,3 |   |   |   |   |
| 3 | **1** | **4** |  | 1 | 0,667 | 0,333 | -8 | 1,833 | -0,36 | -2,18 | -3,46 | **1** | **7** | **-5,13** | **1,134** |
| 4 | **3** | **2** |  | 2 | 0,333 | 0,667 | 4 | 1,758 | -0,19 | 3,103 | 3,522 | **1,552** | **5,343** | **-3,48** | **0,582** |
| 5 | **4** | **3** |  | 1 | 0,667 | 0,333 | -3 | 1,937 | -0,34 | -2,08 | -2,2 | **43,03** | **-36,1** | **10,35** | **-0,95** |
| 6 | **6** | **2** | **-1** | 2 | 0 | 1 | -1,5 | 1,656 | 0 | 0,352 | 0,352 | **-31,7** | **19,9** | **-3,66** | **0,213** |

V posledních sloupcích jsou koeficienty upravených polynomů, např. první polynom:

$$S\_{1}\left(x\right)=1+7x-5,13x^{2}+1,134x^{3}$$

Chceme-li tedy najít hodnotu splajnu *S*(2), musíme napřed zjistit, ve kterém z intervalů se bod 0,5 nachází – je to ve druhém intervalu $\left〈x\_{1};x\_{2}\right〉=\left〈1;3\right〉$– a to znamená, že pro*S*(2) musíme použít $S\left(x\right)=S\_{2}\left(x\right)=1,552+5,343.2-3,48.4+0,592.8≅3,054$ .

Graf tohoto splajnu pro volbu *f ‘* (0) = ̶ 4 , *f ‘* (10) = ̶ 1 je na následující straně.

Zde můžeme dobře sledovat plynulou návaznost sousedních polynomů (spojité derivace prvního i druhého řádu v uzlových bodech).